ANALISIS DE CIERTAS RELACIONES DERIVADAS DE LA TABLA DE INSUMO-PRODUCTO

por Roberto Antelo

Antelo, Roberto

Master en Estadísticas, graduado en el C.I.E.N.E.S. y Master en Ciencias de la Computación en el Rensselaer Polytechnic Institute de Nueva York. Fue docente en la Universidad de Belgrano y actualmente se desempeña como Administrador del Sistema de Computación del Area Monetaria del B.C.R.A.

El propósito del presente trabajo es establecer y analizar ciertas relaciones derivadas del modelo representado por la tabla de insumo-producto, con el fin de resolver tres problemas esenciales.

1. Evaluar las variaciones en los precios industriales, frente a la variación de precios en los factores exógenos (importaciones, salarios, beneficios brutos). Estas hipótesis admiten tres postulaciones alternativas:

   1.1. En términos nominales.

   1.2. En términos de proporción del valor bruto de producción.

   1.3. En términos reales.

2. Evaluar el efecto producido por la variación en los precios de ciertos sectores industriales, sobre los precios de los restantes sectores.

3. Combinar simultáneamente las hipótesis de los dos problemas anteriores.

I. DESCRIPCION DE LOS ELEMENTOS DE LA TABLA DE INSUMO–PRODUCTO

X_{ij} : cantidad de unidades del sector i, requeridas por el sector j;

$X_{i.}$: total de insumos entregados por el sector i, al conjunto de sectores industriales;

$X_{.j}$: total de insumos utilizados por el sector j;

$X_{..}$: total de insumos intercambiados por el conjunto de sectores industriales;

F_{ij} : cantidad de unidades del factor exógeno i, requeridas por el sector j (i = 1, importaciones; i = 2, valor agregado bruto);

$F_{i.}$: total de insumos del factor exógeno i, requeridos por el conjunto de sectores industriales;

V_j : valor bruto de producción del sector j;

$V_.$: valor bruto de producción del total de los sectores.

Definiciones y relaciones

(1.1) $$V_j = X_{.j} + F_{.j}$$

el valor bruto de producción es la suma del total de insumos (nacionales en $X_{.j}$ más importados en F_{1j}) más el valor agregado ($F_{.j}$ - F_{1j}). En forma inmediata se verifica:

(1.2) $$V_. = X_{..} + F_{..}$$

(1.3) $$x_{ij} = X_{ij} / V_j$$

el coeficiente técnico (unidades de i, necesarias para producir una unidad de j)

(1.4) $$f_{ij} = F_{ij} / V_j$$

el factor de proporción (proporción del factor i, por unidad de j)

Desarrollando la expresión (1.1):

(1.5) $$\sum_{j=1}^{n} X_{ji} + \sum_{j=1}^{2} F_{ji} = V_{i.}$$

y aplicando las definiciones (1.3) y (1.4):

(1.6) $$\sum_{j=1}^{n} X_{ji} + \sum_{j=1}^{2} f_{ji} = 1$$

Una evolución del sistema se puede expresar como:

(1.7) $$\sum_{j=1}^{n} X^{*}_{ji} + \sum_{j=1}^{2} F^{*}_{ji} = V^{*}_{i}$$

donde el * indica período siguiente y las relaciones establecidas en (1.5) se mantienen. Si se supone que los volúmenes de producción no varían, el cambio podrá adjudicarse -exclusivamente- a la variación en los precios. Esto es, se puede definir:

(1.8) $$X^{*}_{ij} = X_{ij}\,(1 + p_i)$$

$$F^{*}_{ij} = F_{ij}\,(1 + w_{ij})$$

$$V^{*}_{i} = V_i\,(1 + p_i)$$

donde: p_i : tasa de variación del precio del insumo i; w_{ij}: tasa de variación del precio del factor exógeno i, para el sector j.

Reemplazando las definiciones de (1.8) en 1.7), obtenemos:

$$(1.9) \qquad \sum_{j=1}^{n} X_{ji}\ (1 + p_j) \quad + \quad \sum_{j=1}^{2} F_{ji}\ (1 + w_{ji}) \ = \ V_{i.}\ (1 + p_i)$$

o, en forma similar a (1.6):

$$(1.10) \qquad \sum_{j=1}^{n} X_{ji}\ (1 + p_j) \quad + \quad \sum_{j=1}^{2} f_{ji}\ (1 + w_{ji}) \ = \ 1 + p_i$$

Y, restando (1.6) de (1.10), resulta:

$$(1.11) \qquad \sum_{j=1}^{n} X_{ji}p_j \quad + \quad \sum_{j=1}^{2} f_{ji}w_{ji} \ = \ p_i$$

(1.11) puede ser expresada en forma matricial, como sigue:

$$(1.12) \qquad A'p + c = p$$

donde: $A = (x_{ij})$ $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)'$ y $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)'$

$$\text{con } c_i = \sum_{j=1}^{2} f_{ji}w_{ji}$$

II. RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS

Partiendo de la ecuación (1.12) se puede plantear:

$$(2.1) \qquad (I - A')p = c$$

y adoptando la notación $B = I - A'$, $G = B^{-1}$ se obtiene:

$$(2.2) \qquad p = Gc$$

ecuación que expresa la variación de los precios industriales en función de la variación de los precios en los factores exógenos.

Obsérvese que se ha planteado tal variación en términos nominales (recuérdese la definición de c_i). Si se desarrolla la expresión de p_i a partir de (2.2.), se obtiene:

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} c_j \tag{2.3}$$

De allí se deduce que el elemento g_{ij} de la matriz inversa, representa la variación en el precio del insumo i, por unidad de variación ponderada en los precios de los factores exógenos del sector j.

Así como se halló la solución para el caso en que las variaciones se planteaban en términos nominales, cabe hacer el planteo para las otras alternativas.

A veces resulta apropiado definir la variación en términos de proporción:

$$1 + w^{*}_{ij} = (1 + w_{ij})*(1 + p_j) \tag{2.4}$$

De donde:

$$w^{*}_{ij} = w_{ij} + (1 + w_{ij})p_j \tag{2.5}$$

En forma similar, si se define un ponderador que pese la contribución del sector i al valor bruto de producción total,

$$L_i = V_i/V \tag{2.6}$$

se puede definir la tasa de variación del nivel promedio de precios como:

$$\overline{p} = \sum_{i=1}^{n} L_i p_i \tag{2.7}$$

Con esta definición se puede establecer la variación en términos reales mediante:

$$w^{*}_{ij} = w_{ij} + (1 + w_{ij})*\overline{p} \tag{2.8}$$

Por lo tanto, la variación en forma generalizada podrá escribirse como:

$$w^{*}_{ij} = w_{ij} + (1 + w_{ij})*z_{ij} \tag{2.9}$$

donde si:

a) $z_{ij} = 0$, si la variación es en términos nominales;

b) $z_{ij} = p_j$, si la variación es en términos de proporción; y

c) $z_{ij} = p$, si la variación es en términos reales.

De modo que la ecuación (1.11) se transforma en:

$$(I - A' - D)p = c \tag{2.10}$$

donde D es una matriz que expresa los coeficientes que afectan a los términos de p, según los distintos valores de z_{ij}.

O, llamando B^* a $(I - A' - D)$:

$$B^* p = c \tag{2.11}$$

III. EJEMPLO DE APLICACIÓN

A fin de facilitar la visualización de los distintos elementos que intervienen en los cálculos anteriormente desarrollados, se propone un sencillo ejemplo basado en la tabla de insumo-producto para la Argentina del año 1963, cuya tabla de coeficientes y factores técnicos se reproducen a continuación 1/.

TRANSACCIONES DE LA ECONOMIA ARGENTINA

- Año 1963 -

- En millones de m$n, a precios de comprador -

Concepto	Agricultura	Industria	Servicios
Agricultura	37.677,6	209.273,4	465,0
Industria	33.653,6	415.809,1	169.814,0
Servicios	94.304,2	369.016,0	113.540,8
Insumos Nacionales	165.635,4	994.098,5	283.819,8
Insumos Importados	2.069,9	73.578,0	60.918,8
Valor Agregado	291.587,6	621.018,7	783.549,1
Valor Producción	459.292,9	1.688.695,2	1.128.287,7

COEFICIENTES TECNICOS Y FACTORES EXOGENOS

Concepto	Agricultura	Industria	Servicios
Agricultura	0,08203	0,12393	0,00041
Industria	0,07327	0,24623	0,15051
Servicios	0,20532	0,21852	0,10063
Insumos Nacionales	0,36062	0,58868	0,25155

Concepto	Agricultura	Industria	Servicios
Insumos Importados	0,00451	0,04357	0,05399
Valor Agregado	0,63486	0,36775	0,69446
Ponderadores	0,14019	0,51543	0,34438

Las hipótesis sobre las variaciones en los precios de factores exógenos, son las siguientes:

a) 10% nominal en importaciones;

b) 5% real en valor agregado bruto.

Aplicando los desarrollos presentados en el punto anterior, se obtiene:

Matriz D	0,09345	0,34359	0,22957
	0,05413	0,19903	0,13298
	0,10222	0,37584	0,25112
Matriz B	0,91797	-0,07327	-0,20532
	-0,12393	0,75377	-0,21852
	-0,00041	-0,15051	0,89937
Matriz B^*	0,82452	-0,41686	-0,43489
	-0,17806	0,55474	-0,35150
	-0,10263	-0,52635	0,64825
Matriz G^*	11,42203	32,65204	25,36728
	9,91101	32,04523	24,02457
	9,85564	31,18875	25,06563
Vector c	0,03219	0,02274	0,04012

En consecuencia, la solución aproximada es:

$$p_1 = 2{,}12816, \; p_2 = 2{,}01184 \text{ y } p_3 = 2{,}03235, \text{ con } \overline{p} = 2{,}03521.$$

IV. EFECTO EN EL NIVEL DE PRECIOS FRENTE A UNA VARIACION EN TERMINOS REALES EN EL NIVEL DE UN FACTOR EXOGENO

Para facilitar el análisis, se supone que el único factor exógeno que varía es el valor agregado.

Al ser la variación en términos reales, el vector c tomará la forma:

$$c = (W + (1+w)^* \, \overline{p})F_2 \tag{4.1}$$

donde w representa la variación en el valor agregado, común a todos los sectores, y F_2, el vector fila correspondiente al valor agregado de todos los sectores.

A su vez, el término $\bar{p}$ puede representarse como:

(4.2) $$\bar{p} = L'p$$

donde los L_i son los ponderadores de los precios en la fórmula del índice de precios promedio.

En este caso, (2.13) toma la forma:

(4.3) $$Bp = (w + (1 + w)^* L'p)F_2'$$

Y operando algebraicamente:

(4.4) $$(B - (1 + w)^* F_2'L')p = wF_2'$$

cuya solución viene dada por:

(4.5) $$p = [G + (1 + w)^* GF_2'L'G/(1 - (1+w)^* L'GF_2')]wF_2' =$$
$$= [1 + (1 + w)^* s/(1 - s)]w\ GF_2' = w/(1 - (1 + w)^* sGF_2'$$

donde $s = L'GF_2'$.

Nótese que GF_2' representa el vector de variación de precios frente a variaciones nominales del 100% en salarios, por lo que s representa el índice ponderado de precios frente a variaciones nominales de salarios.

De (4.5) se deduce:

(4.6) $$\bar{p} = L'p = s/(1 - (1 + w)^* s)\ w$$

En el caso del ejemplo presentado en el punto anterior, el valor de s es 0,927 y, en consecuencia, 1/s-1 resulta 0,078.

Este resultado puede extenderse a cualquier factor exógeno, con sólo cambiar la notación.

Es importante advertir que el efecto de variación simultánea de más de un factor exógeno en términos reales, no es puramente aditivo, ya que la inversa que figura en la expresión (4.5) no es directamente la suma de las inversas respectivas.

V. VARIACION DEL SISTEMA FRENTE A VARIACIONES EN LOS PRECIOS DE LOS SECTORES PRODUCTIVOS

Una distinta perspectiva se presenta cuando se desea estudiar la evolución del sistema, frente a una variación en los precios de los sectores productivos.

El caso más sencillo resulta cuando se considera la variación de un sólo sector productivo. Sea éste el h.

Debe tenerse en cuenta que p_h es ahora una dato del problema. En consecuencia, se debe introducir una nueva incógnita.

Dado que la variación en los precios de las importaciones suele ser exógena salvo que se modifique ese carácter mediante una variación en el tipo de cambio - lo indicado resulta tomar como nueva incógnita w_{2h}; esto es, la variación a priori p_h está prevista para aumentar el valor agregado del sector h.

Bajo estas hipótesis, reescribimos (2.13) en la forma:

$$(5.1) \qquad \sum_{j \neq h}^{n} b^*_{ij} p_j + b^*_{ih} p_h = c_i \qquad , i \neq h,$$

$$(5.2) \qquad \sum_{j=h}^{n} b^*_{hj} p_j + b_{hh} p_h = c^*_h + f^*_{2h} w_{2h} \ ;$$

donde el asterisco en c_h, destaca el hecho de haber desagregado el segundo término.

Si ahora se reúnen las incógnitas en la izquierda, se obtiene:

$$\sum_{j=h}^{n} b^*_{ij} p_j + 0 x w_{2h} = c^*_i - b^*_{ih} p_h$$

$$\sum_{j=h}^{n} b^*_{hj} p_j - f^*_{2h} w_{2h} = c^*_h - b_{hh} p_h$$

Obsérvese que se obtiene un nuevo sistema donde en la columna h-ésima de la matriz B^* aparece una nueva columna de ceros, salvo en el elemento h-ésimo igual a $-f_{2h}$. además, el vector c aparece modificado mediante la resta del producto de p_h por la columna h-ésima de B^*.

El nuevo sistema puede ser escrito como:

$$(5.3) \qquad Uy = d, \text{ donde}$$

$$(5.4) \qquad U = B^* - (B^*_h + f_{2h} e_h) e'_h$$

B^*_h : columna h-ésima de B^*, e_h: vector elemental y $d = c - p_h B^*_h$

La resolución del sistema (5.4) da por resultado:

$$(5.5) \qquad y = [I - (I + f_{2h} G^*) e_h e'_h / (f_{2h} g^*_{hh})] (p^0 - p_h e_h)$$

En particular:

$$(5.6) \qquad y_i = p^0_i - {}_{ih}p_h - {}_{ih}p^0_h / f_{2h} g^*_{hh} -$$

$$- g^*_{ih} p^0_h / g^*_{hh} + {}_{ih}p_h / f_{2h} g^*_{hh} + g^*_{ih} p_h / g^*_{hh}$$

Teniendo en cuenta que para $i \neq h$, es $y_i = p_i$ y para $i=h$, $y_h = w_{2h}$:

$$(5.7) \qquad f_{2h} w_{2h} = (p_h - p_h^0)/g^*_{hh}$$

$$p_i = p_i^0 + g^*_{ih}(p_h - p_h^0)/g^*_{hh}$$

La interpretación del resultado obtenido en (5.7) es claro si se recuerda el significado de los coeficientes g_{ij}.

La extensión del problema a la variación simultánea en más de un sector industrial, puede hacerse sin mayor dificultad generalizando las ecuaciones (5.2) donde ahora en vez de un solo subíndice h, existirá un conjunto de índices que identificarán los sectores cuyos precios son modificados a priori.

Para la resolución del sistema, se construyen en forma similar la matriz U y el vector d.

Para su análisis, sin embargo, es conveniente suponer que los índices de los sectores cuyos precios son fijados a priori, son los últimos. En este caso, particionamos matrices y vectores, según se indica a continuación.

$$B^* \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \quad U=\begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & -H \end{pmatrix} \quad p=\begin{pmatrix} p_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad c=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad d=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

donde $d_1 = c_1 - B_{12}p_2$; $d_2 = c_2^* - B_{22}p_2$ y H es una matríz diagonal con $h_{ii} = -f_{2i}$.

Como se verifica que:

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11}^{-1} & 0 \\ H^{-1}B_{21}B_{11}^{-1} & -H^{-1} \end{pmatrix}$$

resulta:

$$(5.8) \qquad p_1 = B_{11}^{-1}d_1 = B_{11}^{-1}c_1 - B_{11}^{-1}B_{12}p_2$$

$$w_2 = H^{-1}B_{21}B_{11}^{-1}d_1 - H^{-1}d_2.$$

Por otra parte, si se redefine $G = B^{*-1}$, puede verificarse que se cumple:

$$p_1 = p_1^0 + G_{12}G_{22}^{-1}(p_2-p_2^0) \tag{5.9}$$

$$Hw_2 = G_{22}^{-1}(p_2-p_2^0)$$

Es importante destacar que la expresión desarrollada en (5.9) no es, directamente, la suma de los efectos representados en la ecuación (5.6); esto es, la variación simultánea de más de un precio industrial origina un efecto suma modificado por la interacción de los distintos sectores cuyos precios varían a priori, consecuencia que está representada en la matriz producto $G_{12}\ G_{22}^{-1}$.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Olivera, M. A.: "La tabla de insumo-producto", Trabajo de Divulgación N° 8, B.C.R.A., 1980.

United Nations: "Input-Output tables and analysis", Studies in Methods, 1973.